8/12/16

Θεμελιώδες Θεώρημα Πεπερασμένων Αβελιανών Ομάδων

$G = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_l^{k_l}$

$1 < p_1 < p_2 < \dots < p_l$: πρώτοι

$1 \leq k_i \quad i = 1, \dots, l$

$G \cong A_1 \times A_2 \times \dots \times A_l$ με $|A_i| = p^{k_i}$

Απόδειξη

Υπάρχουν φυσικοί $k_{i,1}, \dots, k_{i\,m(i)}$

το m που εξαρτάται από το i

τω. $k_i = k_{i,1} + \dots + k_{i\,m(i)}$

Τότε:

$$A_i \cong \mathbb{Z}_{p_i^{k_{i,1}}} \times \mathbb{Z}_{p_i^{k_{i,2}}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_i^{k_{i,m(i)}}}$$

Οι φυσικοί $\{k_{i,1}, \dots, k_{i,m(i)}\}$ $i = 1, \dots, l$ καθορίζονται αναλλοίωτα της G.

Τελικά $G \cong \prod_{i=1}^{l} \mathbb{Z}_{p_i^{k_{i,1}}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_i^{k_{i,m(i)}}}$

Πόρισμα

Έστω ότι ο ν διαιρεί την $|G|$, η οποία είναι αβελιανή. Τότε η G έχει υποομάδα τάξης ν. (Δηλαδή ισχύει το αντίστροφο του Lagrange)

Πόρισμα

Το πλήθος των μη ισόμορφων αβελιανών τάξης $|G| = p_1^{k_1} \times \dots \times p_l^{k_l}$ δίνεται από τον φυσικό : $\delta(k_1) \dots \delta(k_l)$

Εδώ δk_i δηλώνει το πλήθος των διαμερίσεων του φυσικού k_i.

Πχ

Άπειρη αβελιανή: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3^2$

Άπειρες Αβελιανές

1) Πεπερασμένα γενόμενες
(δηλαδή το πλήθος των γεννητόρων είναι πεπερασμένο)

2) Μη πεπερασμένως γενόμενες
??

1) $O > A$ μέγιστη υποομάδα η οποία είναι πεπερασμένη.

$$O \cong A \times B$$

$|B| = +\infty$ και πεπερασμένως γενόμενη

Η A είναι γνωστή από τις πεπερασμένες αβελιανές.
Για το B βρίσκουμε τον αριθμό των γεννητόρων της και ονομάζεται rank B = rank O
Αν rank B = rank $O = n$, τότε

$$B \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{n \sim \text{το πλήθος}}$$

Θεμελιώδες Θεώρημα Πεπερασμένως Γενόμενων Αβελιανών Ομάδων

Η O είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο πεπερασμένου πλήθους μη τετριμμένων κυκλικών τάξης δύναμης πρώτων και η A είναι γνωστή από τις πεπερασμένες αβελιανές $|A| < +\infty$

πεπερασμένου πλήθους αντιγράφων της ομάδας $\mathbb{Z}_2$.
Για το B βρίσκουμε τον αριθμό των γεννητόρων της και ονομάζεται $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} G$

Στις αβελιανές ισχύει το αντίστροφο του Lagrange.
Γενικά όχι??

$k / |G|$ υπάρχει $H \le G$ με $|H| = k$?
G: όχι αβελιανή.

Αν $k =$ πρώτος $= p$, τότε υπάρχει $H \le G$ με $|H| = p$.
Sylow: αν $p^k / |G|$ υπάρχει $H \le G$ με $|H| = p^k$?

<u>Θεώρημα του Sylow</u>

$|S_4| = 4! = 24$
$A_4 \le S_4$
$|A_4| = 12 = 2^2 \cdot 3$

$1, 2, 3, 4, 12 \,/\, |A_4|$

Τους πρώτους όπως και το 1 δε τα μελετώ γιατί γνωρίζω ήδη ότι υπάρχει υποομάδα

A_4: όχι κυκλική $\quad o(\sigma) \neq 12 \quad \sigma \in A_4$
$o(\sigma) = 6 \in A_4$
κύκλος μήκους 6 στην A_4: αδύνατο.
$\sigma \cdot \tau$ ξένοι με $o(\sigma) = 2$ και $o(\tau) = 3$
Όμως τότε δε θα γράφονται σαν άρτιο πλήθος αντιμεταθέσεων
Άρα $\sigma\tau \notin A_4$

Υποομάδα τάξης 4 στην A_4

$Y = \{1, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$

κάθε κύκλος μήκους 3: $(a_1, a_2, a_3) \in A_4$

$(1,3,4) \in A_4$

Αυτά τα στοιχεία είναι 8.

Άρα

δεν υπάρχει άλλη υποομάδα τάξης 4

$Y \trianglelefteq A_4$

Άρα

$1 \lneq \langle (1,2),(3,4) \rangle \lneq Y \trianglelefteq A_4$

Παράδειγμα

$|A_4| = 2^2 \cdot 3$

$|Y| = 6 = 2 \cdot 3$ όχι

$|Y| = 2, 4, 3$

Κανονικοποιητής μιας υποομάδας $Y \leq O$

$N_O(Y) = \{g \mid g \in O \text{ με } gYg^{-1} = Y\}$

$Y \trianglelefteq N_O(Y) \leq O$

Το πλήθος των συζυγών υποομάδων $(gYg^{-1}, g \in O)$ της Y δίνεται από το δείκτη $[O : N_O(Y)]$

$Y \trianglelefteq N_O(Y) \leq O \quad , |O| = +\infty$

$[O:Y] = [O : N_O(Y)]\,[N_O(Y) : Y]$

$\Rightarrow [O : N_O(Y)] / [O : Y]$

$\Downarrow$

πλήθος διακεκριμένων συζυγών της Y

Αν $[G : N_G(H)] = 1$ (δηλ. έχουμε μόνο ένα σύμπλοκο)
τότε $H \triangleleft G$

Πρώτο Θεώρημα του Sylow

Έστω p: πρώτος και G πεπερασμένη.

1) Αν ο $p \mid |G|$ και $p^k \mid |G|$, τότε υπάρχει υποομάδα H τάξης p^k
2) Ο μέγιστος φυσικός ώστε $p^m \mid |G|$ είναι μια p-Sylow υποομάδα

Δηλαδή μια υποομάδα H της G καλείται p-Sylow υποομάδα αν $|H| = p^m$ και ο m είναι ο μέγιστος φυσικός $p^m \mid |G|$.

3) Αν $H \leq G$ με $|H| = p^k$, τότε υπάρχει p-Sylow υποομάδα Z μια $g \in G$ με $H \leq gZg^{-1}$

Έστω Z μια p-Sylow, υπάρχουν άλλες τέτοιες υποομάδες?

Ναι: gZg^{-1} $g \in G$

Διαφορετικές $[G : N_G(Z)]$ γιατί p^{m} (μέγιστος) $/ |G|$

Αν Z' είναι μια άλλη p-Sylow τότε από το Θεώρημα Sylow έχουμε ότι υπάρχει $g \in G$ και Z μια p-Sylow
$Z' = gZg^{-1}$
Είναι ίσες γιατί έχουν την τάξη

Πόρισμα

Αν Z είναι μια p-Sylow, τότε $Z \triangleleft O \Leftrightarrow$
$[O : N_O(Z)] = 1$

Παράδειγμα

$\{1, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \trianglelefteq A_4$
2-Sylow

Ενώ η 3-Sylow στην A_4 δεν είναι μοναδική άρα όχι κανονική.

Πόρισμα

Έστω Z μια p-Sylow της O. Ο αριθμός των p-Sylow της O δίνεται από τον $[O:N_O(Z)]$. Ο αριθμός αυτός διαιρεί την τάξη της O και έχει μορφή $1+pl$ με $l \in \mathbb{N}$

Παράδειγμα

Έστω $|O| = 2 \cdot 3 = 6$. $\quad O \cong S_3$ ή $\mathbb{Z}_6$
$\exists\, a, b \in O$ με $o(a) = 3$ και $o(b) = 2$.

Έστω $\underset{3\text{-Sylow}}{Y = \langle a \rangle}$ και $\underset{2\text{-Sylow}}{\Pi = \langle b \rangle}$

$$\text{Πλήθος 3-Sylow} = \underset{1+3l \;\Rightarrow\; l=0}{[O : N_O(Y)]} \,/\, [O:Y] = 2 \;\Big\}\; Y \trianglelefteq O$$

$$bab^{-1} = \begin{cases} a \Rightarrow \text{τότε } O: \text{αβελιανή δηλ. } \mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \\ a^2 \Rightarrow \text{τότε } O \cong S_3 \end{cases}$$

Πρόταση
Αν p: πρώτος και $|G| = p^2$, τότε η G είναι αβελιανή.

Απόδειξη
Αν $\exists a \in G$ με $o(a) = p^2 \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}_p(\ast)$
Αν $\nexists a \in G$ με $o(a) = p^2 \Rightarrow o(a) = p$
Υπάρχουν a, b με $b \neq a^k$ και $o(b) = o(a) = p$
Υποθέτουμε ότι G όχι αβελιανή: $ab \neq ba$

a^k: πλήθος p
b^k: πλήθος $p-1$
$a^k b^l$: πλήθος
$(p-1)^2$
$b^l a^k \neq a^k b^l$ πλήθος $(p-1)^2$

Σύνολο μέχρι εδώ
$$p + p - 1 + 2(p-1)^2 = 2p - 1 + 2p^2 - 4p + 2 > p^2$$
$$p^2 - 2p + 1 > 0$$
$$(p-1)^2 > 0$$

Θεώρημα
Έστω p, q πρώτοι με $p < q$. Αν $p \nmid q-1$, τότε η ομάδα G τάξης $p \cdot q$ είναι κυκλική.

Παράδειγμα
$|S_3| = 6 = 2 \cdot 3$
$2 \mid 3-1$

Απόδειξη
Από Sylow έχουμε: Υπάρχει Π μια p-Sylow και Q μια q-Sylow
$$G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{p \cdot q}$$
Από εσωτερικό αβελιανών:

$A, B \trianglelefteq G$

$A \cap B = \{1\}$ $\quad G = AB \Rightarrow G \cong A \times B$

$G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{pq}$

Ο αριθμός των p-Sylow δίνεται από

$$[G : N_G(P)] \,/\, [G : P] = q$$

$$1+pl \Rightarrow 1+pl \,/\, q \xRightarrow{q \text{ πρώτος}} q-1 = pl$$

άρα

άτοπο $\Rightarrow P \trianglelefteq G$

($\Leftarrow$) Ο αριθμός των q-Sylow

$$[G : N_G(Y)] \,/\, [G : Y] = p$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+ql \,/\, p \\ q > p \end{array}\right\} \Rightarrow l = 0 \Rightarrow Y \trianglelefteq G$$

άρα

$P, Y \trianglelefteq G$ με $P \cap Y = \{1\}$

$PY \leq G$ με $|PY| = |G| \Rightarrow G \cong P \times Y$

Άσκηση 1 $\qquad K \leq G$

$|G| = pq$, p, q : πρώτοι, $H \leq G$ τάξης p

α) ΝΔΟ $H \cap K = e$, $G = H \cdot K$

Λύση

$H \cap K \leq H \Rightarrow |H \cap K| / |H| = p \Rightarrow$

$|H \cap K| = 1$ ή p. (1)

$H \cap K \leq K \Rightarrow |H \cap K| / |K| \leq q \Rightarrow$ $\quad \Rightarrow$

$|H \cap K| = 1$ ή q (2)

$H \cap K = \{p\}$

$|H| = p$, p: πρώτος $\Rightarrow$ κάθε μη ταυτοτικό στοιχείο της H να έχει τάξη p
$\Rightarrow$ είναι γεννήτορας $\Rightarrow H$: κυκλική

$|K| = q$, q: πρώτος $\Rightarrow K$: κυκλική

Θ.δ.ο. $G = H \cdot K$

Έστω $x \in HK \Rightarrow x = h \cdot k$, $h \in H$, $k \in K \Rightarrow$
$x \in G \Rightarrow H \cdot K \subset G$ (1)

Έστω $g \in G \Rightarrow o(g) / |G| = p \cdot q \Rightarrow o(g) = 1$ ή p ή q ή $p \cdot q$

• Αν $o(g) = 1 \Rightarrow g = e \Rightarrow g = e \cdot e$, $e \in H$, $e \in K \Rightarrow g \in K$

• Αν $o(g) = p \xRightarrow[\text{τάξης } p]{\text{λαθος}} g \in H \Rightarrow g = g \cdot e \in HK$

• Αν $o(g) = q \xrightarrow{\text{τάξης } p} g \in K \Rightarrow g = eg \in HK$

• Αν $o(g) = pq \Rightarrow G$: κυκλική.

Άρα αν $g \in G \Rightarrow g \in HK \Rightarrow G \subset HK$ (2)

Από τις (1) και (2): $G = HK$

Όταν είναι κυκλική η G είναι κυκλική

$G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q = H \cdot K$

β) ΝΔο $H \trianglelefteq G$ και $K \trianglelefteq G$

και $hk = kh$

$\in H$

{ Αφού H: κυκλική $\Rightarrow H$: αβελιανή
$\Rightarrow$ αριστερά και δεξιά σύμπλοκα θα ταυτίζονται

Να τα
με αφο
με σε
k ναι

Έχουμε $H \trianglelefteq G \Rightarrow gh^{-1}g^{-1} \in H$

και $K \trianglelefteq G \Rightarrow hkh^{-1} \in K$

Άρα

$kh^{-1}k^{-1} \in H$ και $h \in H \xrightarrow{H\text{: ομάδα}} hkh^{-1}k^{-1} \in H$

$hkh^{-1} \in K$ και $k^{-1} \in K \xrightarrow{K\text{: ομάδα}} hkh^{-1}k^{-1} \in K$ (*)

Ξεκινάμε με:

$ghg^{-1} \in H$

$o(ghg^{-1}) = o(h)$

Όμως

$o(h) = 1$ ή p

• Αν $o(h) = 1 \Rightarrow ghg^{-1} = e \in H$

• Αν $o(h) = p \Rightarrow ghg^{-1} \in H$ εφόσον μόνο η H έχει τάξη p.

Όμοια δείχνω και για την K

(*) $hkh^{-1} \in H \cap K = \{e\} \Rightarrow hk = kh$, k,h τυχαία